

## EXAMEN ANÁLISIS NUMÉRICO

03 DE DICIEMBRE DE 2008 (PRACTICO)

1) Considere la sucesión

$$x_{n+1} = (x_n^2 - 3(1-a)x_n + 2)/3a$$

donde  $a$  es una constante a determinar.

- (1) Demuestre que si la sucesión converge, lo hace a una de las raíces de la ecuación  $f(x) = x^2 - 3x + 2 = 0$ .
- (2) Para cada una de las raíces de  $f(x)$ , encuentre un intervalo de valores para la constante  $a$  tal que la sucesión converge a dicha raíz.
- (3) Para cada raíz encuentre un valor de  $a$  tal que la sucesión converge en forma cuadrática.
- (4) Encuentre un intervalo de valores de  $a$  tal que la sucesión no converge a ninguna de las dos raíces.

2) Sea  $f$  una función cuatro veces derivable y sean  $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$  números reales. Sea  $S$  el spline cúbico natural que interpola a  $f$  en los puntos  $x_i, i = 1 \dots 4$ .

Sea  $P$  un polinomio de grado tres que interpola a  $f$  en los puntos  $x_i, i = 1 \dots 4$  y que además satisface  $P''(x_1) = P''(x_4) = 0$ .

¿Se cumple necesariamente que para todo  $x \in [x_1, x_4]$ ,  $P(x) = S(x)$ ? Justifique su respuesta.

3) Aproximar la función  $f(x) = e^x$  con un polinomio de grado 2, en el intervalo  $[0, 1]$  considerando el espacio de las funciones continuas en  $[0, 1]$  equipado con el producto interno

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx.$$

4) Sea  $p$  un polinomio de grado menor o igual que  $n - 1$  que interpola a la función  $f(x) = \cos(x)$  en cualquier conjunto de  $n$  nodos en el intervalo  $[-\pi/4, \pi/4]$ . Demostrar que:

$$\frac{|p(x) - f(x)|}{|f(x)|} \leq \frac{2^{n+1}}{\sqrt{2}n!}.$$

5) Ejercicio para libres:

Sean  $T$  y  $M$  las aproximaciones a  $\int_a^b f(x)dx$  dadas por la regla del trapecio y la regla del punto medio correspondientes a la partición  $p = \{a = x_0 < \dots < x_n = b\}$ . Sea  $\tau$  la partición del intervalo  $[a, b]$  que se obtiene al agregar a  $p$  los puntos medios de los intervalos  $[x_i, x_{i+1}], i = 0, \dots, n - 1$ . Sea  $S$  la aproximación de  $\int_a^b f(x)dx$  asociada a la partición  $\tau$  por la regla de Simpson. Mostrar que  $S = \frac{1}{3}T + \frac{2}{3}M$ .

Ejercicios teóricos (Los alumnos regulares deben hacer 2 problemas y los alumnos libres deben hacer los 3 problemas):

T1) a) Enunciar y demostrar el teorema de existencia de un punto fijo.

b) Enunciar y demostrar el teorema de convergencia de la sucesión generada por el método de punto fijo ( $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ ).

T2) Enunciar y demostrar el teorema del error en el polinomio interpolante.

T3) Deducir la regla del punto medio compuesta dando las expresiones de la fórmula y su error.